C'est toujours la même chanson !

Terminale, spécialité mathématique;2023–2024

Si c'est votre première lecture, **il faut d'abord que vous lisiez le document intitulé « Langage mathématique »**.
Si c'est votre première et dernière lecture, c'est que vous ne vous reportez pas à ce document après chaque rendu de devoir, et c'est dommage (ça reste mieux que de ne l'avoir jamais lu).
Dans la marge de vos copies, vous trouverez des codes comme $\mathtt{M}_{\mathtt{dév}}$ ou $\mathtt{E}_{\mathtt{signe}}$. L'objectif est de vous montrer que les erreurs, c'est toujours la même chanson ! Il ne tient qu'à vous de changer de disque. Ce qui suppose de ne pas faire des maths en mode automatique: il faut questionner ce que l'on écrit (comme lors d'une dictée obligeant à se demander pour chaque mot la règle de grammaire à utiliser), ce qui suppose d'être **concentré**.
Le temps moyen de concentration ininterrompue est naturellement faible. C'est normal, c'est dur d'être concentré sur un temps long. Pour progresser, il faut **à la maison** tenter d'être dans sa bulle (que ce soit un travail d'histoire ou d'anglais, peu importe) pendant 5 minutes, la semaine suivante 6 minutes, etc. « Dans sa bulle », ça veut dire qu'on n'entend plus la perceuse du voisin. Vous développerez ainsi une capacité de concentration qui vous sera bien utile pour vos études post-bac, quelles qu'elles soient.
Ce document explique la liste des codes que vous trouverez dans vos copies.

$\mathtt{E}_{\mathtt{signe}}$: **Erreur de signe:**

Pourquoi paraît-il évident de lire $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b}$, et fait-on aussi souvent des erreurs du type: $4 - \dfrac{3x-1}{2} = \dfrac{8-3x-1}{2}$?
Bien sûr, l'autre erreur de signe répandue apparaît lors du développement d'un produit en utilisant la simple ou la double distributivité comme expliqué en $\mathtt{M}_{\mathtt{dév}}$.

$\mathtt{E}_{\mathtt{college}}$ **Erreurs de calculs niveau collège:**

- $\mathtt{E}_{\mathtt{signe}}$ est la plus répandue et elle l'est tellement que j'en ai fait un point à part.
- **Erreur de résolution de l'équation** $x^2 = a$:
  Pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, c'est une grosse erreur [1] d'écrire $x^2 = a \implies x = \sqrt{a}$
  (Si x est préalablement déclaré dans $\mathbb{R}_+$ au lieu de $\mathbb{R}$, alors l'implication est correcte et alors il faut la justifier).
- **Erreur lors du développement de la puissance d'une somme.**
  Pour $n \in \mathbb{N}$ et a et b dans $\mathbb{R}^*$, $(a+b)^n = a^n + b^n$ est une assertion fausse.
  Vous le savez bien lorsque $n = 2$, mais c'est tout aussi faux lorsque $n \geqslant 2$!
  c'est également une grosse erreur d'écrire pour a et b dans $\mathbb{R}_+$ l'égalité $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$.
- **Erreur de somme ou de produit de deux quotients [2].**
  $\dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{x} = \dfrac{x-5}{2-x}$ ou $\dfrac{5}{2} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{15}{2}$.
  Concernant la somme de deux fractions, ne pas systématiquement prendre le produit des dénominateurs comme dénominateur commun, mais prendre le ppcm (**plus petit** commun multiple)

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a > 0,\ x^2 = a \iff x^2 - \sqrt{a}^2 = 0 \iff (x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}) = 0 \iff (x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a})$
2. les mots « fraction » et « quotient » ne sont pas synonymes: une fraction est un quotient de deux nombres entiers

$\mathtt{E_{langage}}$: **Erreurs de notations et de langage**:

- confusion entre la fonction f et le nombre $f(x)$;
- confusion entre la suite (u_n) et le nombre u_n;
- confusion entre $=$ et $\iff$;
- la ~~courbe~~ fonction est croissante sur l'intervalle I;
- apparition de symboles mathématiques dans une phrase rédigée en français[3];
- erreur sur le domaine de validité d'un prédicat. **Exemple d'erreur**:
  $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{x^2-2}{x-1} = 0 \iff x \neq 1 \text{ et } x^2 - 2 = 0$
  Le prédicat « $x \neq 1$ et $x^2 - 2 = 0$ » a bien du sens pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais ce n'est pas le cas du prédicat $\frac{x^2-2}{x-1} = 0$.
  Il faut écrire: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \frac{x^2-2}{x-1} = 0 \iff x^2 - 2 = 0$

$\mathtt{E_{ineq}}$:**Erreur lors de la résolution d'une inéquation**.
Les deux types d'erreurs les plus répandues:

① Soit $x \in \mathbb{R}$ (ou $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ pour avoir une erreur de moins).
$$(2x-1)(x-3) > x - 3 \iff (2x-1) > \frac{x-3}{x-3} \iff x > 1.$$
On ne peut pas multiplier (ou diviser) les 2 membres d'une inégalité par un même nombre dont on ne connaît pas le signe (ici $x - 3$ est un nombre positif ou négatif, cela dépend du nombre x arbitrairement fixé).
Il faut appliquer la méthode générale de résolution d'une inéquation (créer un membre nul, factoriser, puis faire un tableau de signes, voir $\mathtt{M_{inéq}}$)

② Soit $x \in \mathbb{R}$
$(2x-1)(x-3) > 0 \iff 2x - 1 > 0 \text{ ou } x - 3 > 0$ **NON!**
Les mécanismes pavloviens vous font appliquer la méthode de résolution d'une équation produit nul à une inéquation, vous faisant ainsi écrire n'importe quoi: il est clair que si les deux facteurs sont négatifs, l'assertion « $(2x-1)(x-3) > 0$ » est vraie alors que l'assertion « $2x - 1 > 0$ ou $x - 3 > 0$ » est fausse; ou encore si un seul des deux facteurs est négatif, l'assertion « $(2x-1)(x-3) > 0$ » est fausse alors que l'assertion « $2x-1 > 0$ ou $x-3 > 0$ » est vraie.

$\mathtt{E_{déclar}}$: **Erreur de non déclaration d'une variable**.
L'équivalence dans l'exemple précédent « $(2x-1)(x-3) > 0 \iff 2x - 1 > 0$ ou $x - 3 > 0$ » n'est vraie que lorsque $x > 3$. Mais la phrase précédent cette équivalence est « Soit $x \in \mathbb{R}$ », et cette phrase astreint donc le nombre x au domaine des nombres réels, et donc **l'équivalence est ici une assertion fausse**. Elles serait vraie si on avait écrit « Soit $x > 3$ ». **Il faut TOUJOURS préciser le domaine dans lequel une variable libre est astreinte**, sans quoi il est impossible de déterminer la valeur de vérité d'une équivalence ou d'une implication.

$\mathtt{E_{\forall}}$: **Erreur pour montrer une assertion universelle : « $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ »**.
Exemple: montrons l'assertion (fausse): $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1$ est un nombre premier.

① $2^{2^0} + 1 = 3$ ② $2^{2^1} + 1 = 5$ ③ $2^{2^2} + 1 = 17$ ④ $2^{2^3} + 1 = 257$ ⑤ $2^{2^4} + 1 = 65\,537$

sont tous des nombres premiers **donc** : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1$ est un nombre premier.
NON, **on ne peut pas généraliser des exemples**! Pierre de Fermat (XVII^e^) a fait l'erreur de généraliser; on sait aujourd'hui que pour tout $n \in [\![5; 32]\!], 2^{2^n} + 1$ n'est pas un nombre premier. Pour $n \geq 33$, personne ne sait. Peut-être vous?[4]

3. pour passer du français au langage mathématique, utiliser les deux points : ou les guillemets « »
4. Pour $n = 33$, le problème est peut-être un chouïa difficile. Trouvez-vous grossière l'erreur que Pierre de Fermat a commise pour $n = 5$ (au XVIIe) ?

$\mathtt{E_{tableau}}$: **Erreur dans un tableau de signes ou de variations**:

- oubli d'une valeur interdite;
- les nombres pour lesquels il y a un changement de signes ou un changement de variations ne sont pas ordonnés du plus petit au plus grand;
- oubli des images ou des limites.
- dans un tableau de signes, on utilise la règle des signes **d'un produit, pas d'une somme**

$\mathtt{E_{logique}}$: **Erreur de logique.**
Il y en a de toute sorte. La plus fréquente est la suivante:
Pour montrer une certaine assertion P, je commence par supposer qu'elle est vraie, je déroule une série d'implications infaillibles et dont je suis très fier, je parviens à une assertion évidemment vraie du type $2 = 2$, et j'en conclus que l'assertion initiale P est vraie [5]. On ne commence par supposer vraie une assertion que dans le but de montrer qu'elle est fausse (raisonnement par l'absurde).

$\mathtt{E_{récur}}$ **Rappel pour rédiger une récurrence :**

① on énonce clairement la propriété (prédicat) $P(n)$ à prouver.

② initialisation : on démontre l'assertion $P(n_0)$

③ transmission : on fixe **un** entier $n \geq n_0$, on suppose que $P(n)$ est vraie pour **cet** entier n, et on déduit de cette hypothèse que $P(n+1)$ est vraie.

④ conclusion : $P(n)$ est vraie au rang n_0 et est héréditaire, donc est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Ce raisonnement est souvent source d'erreurs :

- si au cours de la transmission, on prouve la propriété au rang $n+1$ sans utiliser l'hypothèse de récurrence, cela signifie que l'on peut prouver directement le résultat (et c'est alors ce qu'on doit faire).
- si la propriété à démontrer ne dépend pas d'un entier, mais par exemple d'un nombre réel, la démonstration par récurrence est impossible ! Seul un entier possède un successeur (3 a un successeur, c'est 4; π n'en a pas)
- si dans la transmission, on suppose la propriété vraie pour « **tout** n » au lieu de « **un** n », la démonstration n'a plus aucun sens, car on a supposé vrai la conclusion que l'on voulait prouver !

$\mathtt{M_{dév}}$ **: Méthode pour développer.**
Proscrire la distributivité non réfléchie de gauche à droite:
$(3a-1)((2-5a) = 6a - 15a^2 - 2 + 5a$ (écrire $-(-5a)$ est pire encore)
Il faut chercher parmi les 4 distributions, celle(s) qui donne(nt) le plus haut degré, puis le degré inférieur, etc... et calculer **dans sa tête** le coefficient pour un degré donné. On écrit donc en **une seule étape** le résultat suivant:
$(3a-1)((2-5a) = -15a^2 + 11a - 2$
Cela peut veut paraître difficile au début. En devoir, continuez à appliquer la méthode apprise au collège, mais en temps libre, entraînez-vous avec cette méthode plus mentale et qui (une fois maîtrisée) réduit considérablement les erreurs et le temps passé.

$\mathtt{M_{facto}}$ **: Méthode pour factoriser**.
Ne pas chercher mécaniquement sans réfléchir les racines d'un trinôme à l'aide de la formule (qu'on ne sait même plus démontrer parce que c'est trop loin). Se rappeler qu'un polynôme (non nécessairement de degré 2) de la variable x, admet pour racine le nombre réel α si, et seulement si, le polynôme est factorisable par $x - \alpha$.

5. c'est une manipulation rhétorique classique que de **confondre une implication avec sa réciproque**

Inutile donc de calculer le discriminant pour factoriser $2x^2-3x+1$ car ce polynôme admet 1 pour racine évidente, il est donc factorisable par $(x-1)$, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a:
$2x^2-3x+1=(x-1)(ax+b) \quad (E_1)$
Inutile non plus d'écrire cette dernière égalité, on écrit directement la factorisation avec les bons coefficients a et b qu'on trouve en identifiant les coefficients de plus haut et de plus bas degré dans le développement de l'égalité (E_1):
ax^2 et $2x^2$ sont les monômes de plus haut degré et $-b$ et 1 sont les monômes de plus bas degré d'un même polynôme, donc $a=2$ et $b=-1$, (tout cela se fait dans sa tête).
Finalement, simplement après avoir signalé dans sa copie que 1 est racine évidente de $2x^2-3x+1$, et que par conséquent il est factorisable par $(x-1)$, il est possible d'écrire sans plus de justification sa factorisation:
$2x^2-3x+1=(x-1)(2x-1)$ ce qui donne la $2^{\text{ème}}$ racine du trinôme, en l'occurrence $\frac{1}{2}$

$\mathtt{M}_{\mathtt{signe}}$: **Méthode pour étudier le signe d'une fonction.**
Cette méthode est souvent un préalable à l'étude des variations d'une fonction.
Exemple: Étudier le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(2-x)$.
Voici une **méthode incorrecte**:
Soit $x\in\mathbb{R}$.
$f(x)=0 \iff (\mathrm{e}^x-1)(2-x)=0 \iff \mathrm{e}^x-1=0$ ou $2-x=0$
$f(x)=0 \iff \mathrm{e}^x=\mathrm{e}^0$ ou $x=2 \iff x=0$ ou $x=2$
où la stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ justifie la dernière équivalence.
On a **donc** (c'est ce « donc » qui est faux) le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le tableau est correct, **mais les signes de** e^x-1 **et de** $2-x$ **ne sont pas justifiés du fait qu'on a résolu l'équation** $f(x)=0$ **alors qu'il fallait résoudre deux inéquations :** $\mathrm{e}^x-1>0$ et $2-x>0$ pour justifier les signes dans le tableau.
(j'accepte néanmoins que le signe d'une fonction affine ne soit plus justifié en Terminale)

Petit détour par la logique au sujet de l'équivalence « $\mathrm{e}^x-1>0 \iff x>0$ »:
Une équivalence est toujours une double implication.
L'implication dans le sens réciproque est « $x>0 \implies \mathrm{e}^x-1>0$ », cette implication justifie donc les deux signes « + » à la première ligne de signes du tableau.
L'implication dans le sens direct est « $\mathrm{e}^x-1>0 \implies x>0$ », et il faut comprendre que **cette implication justifie le signe « - » à la première ligne de signes du tableau:**
L'implication « $A \implies B$ » est équivalente à sa contraposée « NON$(B) \implies$ NON(A) ».
La contraposée de $\mathrm{e}^x-1>0 \implies x>0$ est donc NON$(x>0) \implies$ NON$(\mathrm{e}^x-1>0)$ c'est-à-dire $x\leq 0 \implies \mathrm{e}^x-1\leq 0$

$\mathtt{M}_{\forall}$: **Méthode pour montrer une assertion commençant par le quantificateur universel**.
Par exemple, considérons la question suivante:
« montrer que si un carré est pair, alors c'est le carré d'un nombre pair. »
Il faut déjà remarquer que la question se reformule en langage plus formalisé (c'est-à-dire avec des quantificateurs) de la façon suivante:
« Montrer que **pour tout** entier relatif n, si n^2 est pair, alors n est pair. »
Je commence ma rédaction par: « Soit $n\in\mathbb{Z}$ ».
Cette dernière phrase indique au lecteur que la lettre n désigne dans toute la suite de la question le même entier relatif. Ce n'est pas un nombre variable dans $\mathbb{Z}$, c'est un nombre **fixé** dans $\mathbb{Z}$, et ce nombre est fixé **arbitrairement**, de telle sorte que si la propriété est **vraie pour ce n-là** dans $\mathbb{Z}$, alors elle est **vraie pour tous les n** dans $\mathbb{Z}$.

$\mathtt{M_{in\acute{e}q}}$ **ou** $\mathtt{M_{eq}}$ **: Méthode de résolution par équivalences d'une équation ou d'une inéquation:**

- **identifier** dans sa tête la nature de l'équation (équation du premier degré, collège), équation du second degré (ne pas appliquer bêtement l'artillerie lourde du discriminant quand on peut élégamment transformer l'équation en une équation produit nul), équation où l'inconnue est en exposant (méthode du logarithme), ...

- **raisonner par équivalences successives**, ce qui requiert de déclarer le domaine sur lequel les équivalences sont vraies.
  Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$
  (la lettre x désigne désormais un nombre arbitrairement fixé, toujours le même)
  $\dfrac{x}{x^2-2} \geq x \iff \dfrac{x}{x^2-2} - x \geq 0$ Plusieurs choses à dire sur cette première assertion:
  - **L'assertion qui est vraie est l'équivalence, certainement pas les inégalités**: les deux inégalités ont la même valeur de vérité, c'est-à-dire qu'elles sont toutes deux vraies ou **toutes deux fausses** (pour le nombre x préalablement fixé).
  - **Pour résoudre une inéquation, on commence par créer un membre nul, on factorise l'autre membre, et on finit par un tableau de signes**. Il ne faut surtout pas multiplier les deux membres par le nombre x^2-2 (ou diviser les deux membres par x) car on ne connaît pas le signe de ce nombre.
  - Les deux inégalités sont équivalentes car on a ajouté un même nombre aux deux membres (en l'occurrence $-x$). Pour passer d'une (in)égalité à l'(in)égalité équivalente suivante, il n'y a que trois possibilités (ce qui rend le problème de résolution d'une (in)équation très simple!):
    1. **ajouter** un même nombre aux deux membres,
    2. **multiplier** les deux membres par un même nombre non nul, en prenant soin de changer le sens de l'inéquation si ce nombre est négatif.
    3. prendre **l'image des deux membres par une fonction strictement monotone** sur un domaine englobant ces deux membres. Le sens de l'inéquation est préservée dans le cas d'une fonction strictement croissante et est inversée dans le cas d'une fonction strictement décroissante.

  Continuons la rédaction de la résolution de l'inéquation:

$$\frac{x}{x^2-2} \geq x \iff \frac{x - x(x^2-2)}{x^2-2} \geq 0 \iff \frac{x\Big(1-(x^2-2)\Big)}{x^2-2} \geq 0 \iff \frac{3-x^2}{x^2-2} \geq 0$$

$$\frac{x}{x^2-2} \geq x \iff \frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})} \geq \ 0$$

Le numérateur et le dénominateur ont été factorisés, on peut dresser le tableau de signes:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$\sqrt{3}-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\sqrt{3}+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$x+\sqrt{2}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

On lit sur le tableau que :

$$\frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})} \geq\ 0 \iff x \in [-\sqrt{3};-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2};\sqrt{3}].$$

Or le raisonnement par équivalences a permis d'obtenir :

$$\frac{x}{x^2-2} \geq x \iff \frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})} \geq\ 0.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc : $[-\sqrt{3};-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2};\sqrt{3}]$

$\mathtt{M}_{\mathtt{vérif}}$ **: Méthode de résolution par implications d'une équation ou d'une inéquation:** Il arrive beaucoup plus rarement de devoir résoudre une (in)équation par implications successives. Il faut pareillement déclarer le domaine dans lequel l'inconnue est astreint; mais il faut en plus **vérifier** les solutions trouvées. Par exemple, pour résoudre $f(x) = 5$, on peut raisonner par implications successives pour montrer $f(x) = 5 \implies x \in \{\pi; 6\}$.
L'implication réciproque $x \in \{\pi; 6\} \implies f(x) = 5$ n'a aucune raison d'être vraie[6], donc on ne peut pas affirmer que $f(\pi) = 5$ ni que $f(6) = 5$. Il faut donc calculer ces deux images pour pouvoir conclure quant aux solutions de l'équation $f(x) = 5$.

$\mathtt{M}_{\mathtt{récur}}$ **:** Soigner la rédaction en évitant les erreurs mentionnées dans $\mathtt{E}_{\mathtt{récur}}$, et avant de se lancer dans la phase de transmission, il faut impérativement identifier au brouillon la conclusion visée, qui est $P(n+1)$

6. d'où l'intérêt de raisonner par équivalences successives quand on peut